ارتعاش ورق‌های مدرج تحت جرم گسترده با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ سوم★

علیرضا شوشتری[(۱)] رضا مطهری[(۲)] محمدرضا کاری[(۳)]

چکیده در این مقاله ارتعاش آزاد یک ورق مدرج مستطیلی تحت اثر جرم گستردهٔ موضعی بررسی شده است. خواص ورق‌های مدرج مانند مدول یانگ و چگالی در راستای ضخامت ورق به‌صورت پیوسته متغیر است. ورق به‌حالت مدرج توانی، سیگموید و یا نمایی تعریف می‌شود. تکیه‌گاه ورق ساده در نظر گرفته می‌شود و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ سوم به‌دست می‌آیند. اثر پارامترهای مختلفی مانند ابعاد ورق و جرم گسترده و نسبت جرم روی فرکانس‌های طبیعی آن بررسی شده است. با مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه‌شدهٔ قبلی نشان داده شده است که نتایج حاضر از دقت خوبی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی ارتعاش آزاد، ورق مستطیلی مدرج، جرم گستردهٔ موضعی، تئوری مرتبه سوم تغییرشکل برشی.

Vibration of FGM Plates With Distributed Mass Using Third Order Shear Deformation Theory

A. Shooshtari R. Motahari M. Kari

Abstract *In this paper, free vibration of rectangular functionally graded material (FGM) plates with distributed patch mass is analyzed. Properties of these plates like Young's modulus and density vary continuously throughout the thickness direction. The plate is defined by power-law, sigmoid or exponential function. The boundary condition of the plate is assumed to be simply supported and the equation of motion is obtained by using of Hamilton principle and third order shear deformation theory. The effects of different parameters such as the plate and mass dimensions and mass ratio on the natural frequencies of the plate are analyzed. Compared to previous results, our results are very accurate in similar cases.*

Key Words Free Vibration, Rectangular Plate, Distributed Patch Mass, Third Order Shear Deformation Theory.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۲/۱۲/۱۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۱۰/۲۲ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان. shooshta@basu.ac.ir

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان، همدان، ایران.

(۳) مربی، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ساوه، ساوه، ایران.

مقدمه

بسیاری از سازه‌های مهندسی را می‌توان به‌صورت یک ورق مستطیلی در نظر گرفت. ورق‌ها در کاربردهای متفاوتی مانند صنایع هوافضا، کشتی‌سازی و خودرو استفاده می‌شوند و اغلب این ورق‌ها در کار تحت ارتعاش قرار می‌گیرند. لذا تحلیل ارتعاشی ورق‌ها از مسائل مورد توجه محققان است. از طرفی به‌دلیل اهمیت در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی به‌خصوص در ورق‌های ضخیم، محققان تئوری‌های جدیدی بر مبنای در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی ارائه کردند. از جمله اولین تحقیق‌ها در این مورد، مقالهٔ ارائه شده توسط استاوسکی (Stavski) [1] در سال ۱۹٦٥ بود. پس از آن توسعه این روش توسط محققان دیگر ادامه پیدا کرد. برت (Bert) [2] اثر تغییرشکل برشی را روی ارتعاش ورق‌های مستطیلی لایه‌ای بررسی کرد و تعداد مدهای ارتعاشی بیشتری را ارائه داد. ردی (Reddy) [3] در سال ۱۹۷۹ مسأله ارتعاش ورق‌های مستطیلی لایه‌ای را با در نظر گرفتن تغییرشکل برشی به‌کمک روش المان محدود تحلیل کرد. او هم‌چنین در سال ۱۹۸۹ با بررسی تحلیلی و المان محدود مسأله ارتعاش ورق‌های مستطیلی با استفاده از روش‌های مختلف و مقایسهٔ آنها نشان داد که در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی در تحلیل ارتعاشی آنها مهم است [4]. وی [5] سرانجام در سال ۱۹۹۷ در کتاب خود شرح کاملی را از انواع تئوری‌های موجود در زمینه تحلیل ورق‌ها مانند تئوری کلاسیک و تئوری‌های مرتبه اول، دوم و سوم تغییرشکل برشی ارائه کرد. در فصل یازدهم این کتاب وی نشان داد که با استفاده از تئوری مرتبه سوم در مقایسه با دیگر تئوری‌ها جواب‌های دقیق‌تری به‌دست می‌آید و از طرفی به‌دلیل پیچیدگی روش و زمان‌بر بودن تحلیل با استفاده از تئوری‌های مرتبهٔ بالاتر، استفاده از تئوری مرتبه سوم کافی است و جواب‌ها نیز از دقت بالایی برخوردارند. خدیر (Khdeir) [6] در سال ۱۹۹۹ معادلات کامل تحلیل ارتعاش ورق‌های مستطیلی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه دوم ارائه کرد. سینق (Singh) و همکارانش [7] نیز در سال ۲۰۰۱، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مرکب با مواد تصادفی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌بالا به‌دست آوردند. کانت (Kant) [8] در همان سال حل تحلیلی ارتعاش ورق‌های لایه‌ای مرکب را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌بالا ارائه کرد. هم‌چنین رستگار (Rastgaar) و همکارانش [9] در سال ۲۰۰٦، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مرکب مستطیلی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم محاسبه و ارائه کردند.

از سوی دیگر، بسیاری از ورق‌ها تحت اثر جرم‌هایی که روی آنها سوار هستند، قرار می‌گیرند؛ به‌عنوان مثال، بوردهای الکترونیکی را که قطعات مختلفی روی آنها وجود دارد می‌توان ورق‌هایی در نظر گرفت که تحت اثر جرم‌هایی که روی آنها وجود دارد قرار دارند. به‌دلیل نقطه‌ای نبودن این جرم‌ها تحلیل ارتعاشی این ورق‌ها با وجود جرم‌های گستردهٔ موضعی از اهمیت بالایی برخوردار است. هر چند مقالاتی در زمینهٔ تحلیل ارتعاشی ورق‌ها با جرم‌های متمرکز وجود دارد، اما تحقیقات در زمینهٔ ارتعاش ورق‌ها با جرم‌های گستردهٔ موضعی اندک است. در این میان می‌توان به مقالات ارائه شده توسط کمپاز (Kompaz) [10]، وانگ (Wong) [11] و علی‌بیگلو و همکارانش [12] اشاره کرد.

در میان انواع ورق‌ها، استفاده از ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج (Functionally graded materials: FGM) [13] به‌دلیل داشتن خواص مکانیکی ممتاز و متفاوت که ناشی از تغییر پیوستهٔ خواص در طول ضخامت آنها است و موجب ایجاد میدان‌های تنش پیوسته می‌شود، رو به گسترش است. به‌همین دلیل مسألهٔ ارتعاش ورق‌های مدرج در سال‌های اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته است. حل دقیق سه‌بعدی ورق‌های مستطیلی مدرج با تکیه‌گاه‌های ساده توسط

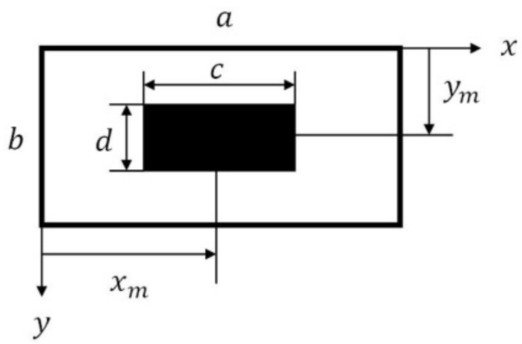
ول (Vel) [14] در سال ۲۰۰٤ ارائه شد و نتایج با استفاده از تئوری‌های مختلف مانند تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و سوم و تئوری کلاسیک مقایسه شد. در همان سال کیان (Qian) و همکارانش [15] مسألهٔ تغییرشکل استاتیکی و ارتعاش آزاد و اجباری یک ورق مستطیلی مدرج ضخیم را با استفاده از تئوری مرتبه‌بالای برشی و روش پترو-گلرکین (Petrov-Galerkin) تحلیل و بررسی کردند. بررسی جامع ارتعاش آزاد و کمانش ورق‌های ساندویچی ساخته شده از مواد مدرج نیز توسط زنکور (Zenkour) [16] در سال ۲۰۰۵ ارائه شد. در این تحقیق تأثیر تغییرشکل برشی عرضی، نسبت ابعاد ورق و نسبت ضخامت به ابعاد ورق مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۲۰۰٦ فریرا (Ferreira) و همکارانش [17] فرکانس‌های طبیعی یک ورق مدرج مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده را با استفاده از تئوری مرتبه اول و سوم تغییرشکل برشی محاسبه و نتایج دو تئوری را با یکدیگر مقایسه کردند. ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ضخیم ساخته شده از مواد مدرج و با تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول توسط هاشمی و همکارانش [18] در سال ۲۰۱۰ ارائه شد. پاسخ استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق‌های ساخته شده از جنس مواد مدرج با استفاده از تئوری مرتبه‌بالای تغییرشکل برشی در تحقیقی دیگر توسط تلها (Talha) [19] در سال ۲۰۱۰ بررسی شد. هم‌چنین برای به‌دست آوردن فرمول دقیقی برای محاسبهٔ فرکانس‌های طبیعی ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج براساس فرکانس‌های ورق‌های ایزوتروپیک متناظر تحقیقی توسط افرایم (Effraim) [20] انجام شد. اویماز (Oymaz) [21] در سال ۲۰۱۲، در مقاله‌ای ارتعاشات ورق‌های ناهمگن ساخته شده از مواد مدرج را با روش ریتز بررسی کرد. حل مسألهٔ ارتعاش غیرخطی ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تحت بارهای تصادفی توسط دوگان (Dogan) [22] در سال ۲۰۱۳ ارائه شد. همان‌طور که در ابتدا ذکر شد، امروزه مواد مدرج به‌دلیل پیوستگی خواص مکانیکی در راستای ضخامت کاربرد گسترده‌ای در ساخت بدنهٔ هواپیماها، فضاپیماها و به‌طور کلی صنایع هوافضا پیدا کرده است. در بسیاری از این موارد روی ورق‌های ساخته شده از این مواد قطعاتی نصب می‌شود که می‌توان آنها را مانند جرم‌هایی در نظر گرفت که باید در تحلیل ارتعاشی مورد توجه قرار بگیرند. لازم به ذکر است که در تمام مقالاتی که مسأله ارتعاش ورق‌های مدرج بررسی شده است وجود جرم گستردهٔ موضعی در تحلیل مورد توجه قرار نگرفته است.

در این مقاله ارتعاش آزاد یک ورق مدرج مستطیلی تحت اثر جرم گستردهٔ موضعی بررسی شده است. ضریب پواسون ورق ثابت در نظر گرفته شده، اما مدول یانگ و چگالی در راستای ضخامت ورق به‌صورت پیوسته متغیر است. ورق به سه حالت مدرج توانی (Power-Law FGM (P-FGM))، سیگموید (Sigmoid FGM (S-FGM)) و یا نمایی (Exponential FGM (E-FGM)) تعریف شده است. تکیه‌گاه ورق ساده در نظر گرفته شده و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم به‌دست آمده است. فرکانس‌های طبیعی ورق محاسبه و اثر پارامترهای مختلف مانند ابعاد ورق و جرم، نسبت جرم، نوع ورق و سطح اثر جرم روی آنها بررسی شده است. با مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه شدهٔ قبلی در حالت‌های مشابه نشان داده شده است که نتایج حاضر از دقت خوبی برخوردار است.

تعریف مسأله

یک ورق مستطیلی به طول a، عرض b و ضخامت h ساخته شده از مواد مدرج را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. محورهای x و y در شکل نشان داده شده و جهت مثبت محور z از وسط ورق به سمت

پایین است. مطابق شکل (۱)، جرم گستردهٔ موضعی (M) به طول c، عرض d و با مختصات مرکز جرم (x_m, y_m) روی ورق قرار گرفته است. مدول یانگ (E) و چگالی (ρ) ورق مدرج در سطح بالا و پایین آن متفاوت است و در طول ضخامت ورق به‌طور پیوسته تغییر می‌کند اما ضریب پواسون (v) در طول ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است.



شکل ۱ ورق مدرج مستطیلی با جرم گستردهٔ موضعی

روش حل

خواص ورق مدرج. ورق مدرج در سه حالت ورق مدرج توانی، سیگموید و نمایی در نظر گرفته می‌شود. در حالت ورق مدرج توانی چگالی و مدول یانگ به‌شکل زیر نوشته می‌شود [13]:

$$E(z) = g(z)E_1 + [1 - g(z)]E_2 \quad (۱)$$

$$\rho(z) = g(z)\rho_1 + [1 - g(z)]\rho_2 \quad (۲)$$

$$g(z) = (\frac{z + h/2}{h})^p \quad (۳)$$

در روابط فوق E_1 و E_2 و ρ_1 و ρ_2 به‌ترتیب مدول یانگ و چگالی سطح پایین ($z = h/2$) و بالای ورق ($z = -h/2$) و p ضریب مادهٔ مدرج است. در حالت ورق مدرج سیگموید خواص در طول ضخامت توزیع یکنواخت‌تری دارد و از روابط زیر پیروی می‌کنند [13]:

$$E(z) = g_1(z)E_1 + [1 - g_1(z)]E_2 , 0 \le z \le h/2 \quad (٤)$$

$$E(z) = g_2(z)E_1 + [1 - g_2(z)]E_2 , -h/2 \le z \le 0 \quad (٥)$$

$$\rho(z) = g_1(z)\rho_1 + [1 - g_1(z)]\rho_2 , 0 \le z \le h/2 \quad (٦)$$

$$\rho(z) = g_2(z)\rho_1 + [1 - g_2(z)]\rho_2 , -h/2 \le z \le 0 \quad (۷)$$

$$g_1(z) = 1 - 1/2(\frac{h/2 - z}{h/2})^p \ , \ 0 \le z \le h/2 \quad (۸)$$

$$g_2(z) = 1/2(\frac{h/2 + z}{h/2})^p \ , \ -h/2 \le z \le 0 \quad (۹)$$

در حالت ورق مدرج نمایی از یک تابع نمایی برای توصیف خواص ورق در طول ضخامت آن استفاده می‌شود [13]:

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (۱۰)$$

$$\rho(z) = Ae^{B(z+h/2)} \quad (۱۱)$$

$$A = E_2 \ , \ B = \frac{1}{h}\ln(\frac{E_1}{E_2}) \quad (۱۲)$$

روابط اساسی حاکم

میدان جابه‌جایی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم به‌شکل زیر معرفی می‌شود [17]:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \quad (۱۳)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \quad (١٤)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \quad (١٥)$$

در معادلات بالا u، v و w به‌ترتیب جابه‌جایی ورق در جهت‌های x، y و z و u_0، v_0 و w_0 جابه‌جایی صفحهٔ میانی ورق و ϕ_x و ϕ_y چرخش‌های برشی هستند. روابط کرنش- جابه‌جایی براساس قوانین الاستیسیتهٔ خطی و با استفاده از میدان جابه‌جایی تعریف‌شده به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [5]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0{}_{xx} \\ \varepsilon^0{}_{yy} \\ \gamma^0{}_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon^1{}_{xx} \\ \varepsilon^1{}_{yy} \\ \gamma^1{}_{xy} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon^3{}_{xx} \\ \varepsilon^3{}_{yy} \\ \gamma^3{}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۱٦}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma^0{}_{yz} \\ \gamma^0{}_{xz} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma^2{}_{yz} \\ \gamma^2{}_{xz} \end{Bmatrix} \tag{۱۷}$$

که در روابط فوق برای ε^0_{xx}، ε^1_{xx}، ε^3_{xx}، ε^0_{yy}، ε^1_{yy}، ε^3_{yy}، γ^0_{xy}، γ^1_{xy}، γ^3_{xy}، γ^0_{yz}، γ^2_{yz}، γ^0_{xz} و γ^2_{xz} داریم [5]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0{}_{xx} \\ \varepsilon^0{}_{yy} \\ \gamma^0{}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{۱۸-الف}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^1{}_{xx} \\ \varepsilon^1{}_{yy} \\ \gamma^1{}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{۱۸-ب}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^3{}_{xx} \\ \varepsilon^3{}_{yy} \\ \gamma^3{}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{3h^2} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{۱۸-ج}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma^0{}_{yz} \\ \gamma^0{}_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \tag{۱۸-د}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma^2{}_{yz} \\ \gamma^2{}_{xz} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{h^2} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \tag{۱۸-ه}$$

برای روابط تنش کرنش نیز داریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-v^2)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۱۹}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+v)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{۲۰}$$

منتجه‌های تنش نیز از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{Bmatrix} dz \tag{۲۱-الف}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{\alpha} \\ R_{\alpha} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha z} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \tag{۲۱-ب}$$

در روابط فوق α و β می‌توانند مختصه‌های x و یا y را اختیار کنند. با استفاده از روابط (۲۱-۱۸) منتجه‌های تنش برحسب کرنش‌ها به‌دست می‌آید [5]:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E'] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E'] & [F] & [H] \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \\ \{\varepsilon^3\} \end{Bmatrix} \tag{۲۲}$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A'] & [D'] \\ [D'] & [F'] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^2\} \end{Bmatrix} \tag{۲۳}$$

در روابط فوق برای ماتریس‌های A و A' داریم [5]:

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & 0\\ A_2 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & A_3\end{bmatrix},\ A'=\begin{bmatrix}A_3 & 0\\ 0 & A_3\end{bmatrix} \quad \text{(۲۴-الف)}$$

$$A_2 = vA_1,\ \ A_3 = [(1-v)/2]A_1 \quad \text{(۲۴-ب)}$$

که در آن:

$$(A_1, B_1, D_1, E_1', F_1, H_1) = \int_{-h/2}^{h/2} E(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6)dz \quad \text{(۲۵)}$$

ماتریس‌های B، D، E'، F و H مانند A بوده و D' و F' نیز مانند A' هستند. هم‌چنین ε^0، ε^1، ε^3، γ^0 و γ^2 در روابط (۲۳ و ۲۲) عبارتند از:

$$\{\varepsilon^0\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^0{}_{xx}\\ \varepsilon^0{}_{yy}\end{Bmatrix},\ \{\varepsilon^1\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^1{}_{xx}\\ \varepsilon^1{}_{yy}\end{Bmatrix},\ \{\varepsilon^3\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon^3{}_{xx}\\ \varepsilon^3{}_{yy}\end{Bmatrix} \quad \text{(۲۶)}$$

$$\{\gamma^0\}=\begin{Bmatrix}\gamma^0{}_{yz}\\ \gamma^0{}_{xz}\end{Bmatrix},\ \{\gamma^2\}=\begin{Bmatrix}\gamma^2{}_{yz}\\ \gamma^2{}_{xz}\end{Bmatrix} \quad \text{(۲۷)}$$

ورق با جرم گستردهٔ موضعی. یک جرم گستردهٔ موضعی M را همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است در نظر بگیرید. فرض شده است که جرم از خمش ورق در جایی که قرار گرفته است جلوگیری نمی‌کند. معادلهٔ انرژی کرنشی ورق را به‌صورت زیر می‌توان نوشت [5]:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy} +\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}+\sigma_{xz}\gamma_{xz}+\sigma_{yz}\gamma_{yz}]dxdydz \quad \text{(۲۸)}$$

با استفاده از روابط (۲۱ و ۱۷، ۱۶) انتگرال‌گیری روی محور z انجام می‌گردد و سپس از روابط (۲۳، ۲۲، ۱۸) جای‌گذاری می‌شود. ضرایب نیز از روابط (۲۵ و ۲٤) به‌دست می‌آیند. معادلهٔ انرژی جنبشی ورق (T_p) بدون وجود جرم گسترده نیز به‌شکل زیر نوشته می‌شود [5]:

$$T_p=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}\rho[(\frac{\partial u}{\partial t})^2+(\frac{\partial v}{\partial t})^2 +(\frac{\partial w}{\partial t})^2]dxdydz \quad \text{(۲۹)}$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۸-۱۳) می‌توان انرژی جنبشی ورق را برحسب جابه‌جایی نوشت. معادلهٔ انرژی جنبشی ناشی از جرم گستردهٔ موضعی (T_m) که روی سطح بالایی ورق قرار گرفته نیز عبارتست از:

$$T_m=\frac{1}{2}\int_{x_m-c/2}^{x_m+c/2}\int_{y_m-d/2}^{y_m+d/2}\gamma_m[(\frac{\partial u}{\partial t})^2+(\frac{\partial v}{\partial t})^2 +(\frac{\partial w}{\partial t})^2]dxdy,\ at: z=-h/2 \quad \text{(۳۰)}$$

در رابطهٔ فوق γ_m مقدار جرم گسترده بر واحد مساحت است. کل انرژی جنبشی ورق از مجموع دو انرژی جنبشی ذکر شده به‌دست می‌آید ($T = Tp + T_m$). شرایط مرزی برای ورق با تکیه‌گاه ساده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_0 = w_0 = \phi_x = N_{yy} = M_{yy} = 0 \text{ at } y = 0, b \quad \text{(۳۱)}$$

$$v_0 = w_0 = \phi_y = N_{xx} = M_{xx} = 0 \text{ at } x = 0, a \quad \text{(۳۲)}$$

در نظر گرفتن سری‌های سینوسی و کسینوسی برای میدان جابه‌جایی در حل مسألهٔ ارتعاش ورق‌های مستطیلی تحت اثر جرم اضافه شده روی آن در تحقیقات قبلی مورد استفاده قرار گرفته است [12] و لذا سری‌های زیر که شرایط مرزی فوق را ارضا می‌کنند برای میدان جابه‌جایی در نظر گرفته می‌شوند:

$$u_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}U_{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \quad (۳۳)$$

$$v_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}V_{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \quad (۳٤)$$

$$w_0(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}W_{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \quad (۳۵)$$

$$\phi_x(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}X_{mn}(t)\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y) \quad (۳٦)$$

$$\phi_y(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}Y_{mn}(t)\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y) \quad (۳۷)$$

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{a},\ \beta_n=\frac{n\pi}{b} \quad (۳۸)$$

در روابط بالا ضرایب U_{mn}، V_{mn}، W_{mn}، X_{mn} و Y_{mn} به‌صورت توابع مختلط نمایی برحسب زمان فرض می‌شوند. به‌طور مثال برای U_{mn} می‌توان نوشت:

$$U_{mn}(t)=U^0{}_{mn}e^{i\omega t} \quad (۳۹)$$

در رابطه فوق $U^0{}_{mn}$ دامنهٔ جابه‌جایی در زمان صفر و ω فرکانس طبیعی است. با استفاده از اصل همیلتون و با استفاده از رابطهٔ (٤٠) معادلات حرکت حاکم بر مسأله به‌دست می‌آیند [3] که به‌علت حجم زیاد معادلات و به‌منظور خلاصه‌نویسی از ذکر آنها صرف‌نظر گردیده است اما نحوهٔ به‌دست آوردن معادلات حرکت با جزئیات در پیوست (الف) آورده شده است.

$$\delta L=\delta(T-U) \quad (٤٠)$$

با قراردادن روابط (۳۷-۳۳) در معادلات حرکت و ساده‌سازی آن یک دستگاه معادلهٔ همگن به‌شکل زیر حاصل می‌شود:

$$([K]-\omega^2[S])\{\Delta\}=0 \quad (٤١)$$

که $[K]$ ماتریس سختی، $[S]$ ماتریس جرم و $[\Delta]$ بردار ضرایب نامعین است. نمونه درایه‌های ماتریس جرم و سختی در معادلهٔ فوق برای یک حالت از توابع مادهٔ مدرج در پیوست (ب) آورده شده است. معادلهٔ (٤١) معمولاً به‌صورت بی‌بعد حل می‌شود و برای این کار در ابتدا معادله‌های انرژی کرنشی و جنبشی را به‌صورت بی‌بعد می‌نویسند و سپس جابه‌جایی‌ها را نیز به شکل بی‌بعد در آن قرار می‌دهند. لذا برای بی‌بعدسازی روش حل در این مقاله، پارامترهای زیر در نظر گرفته می‌شوند:

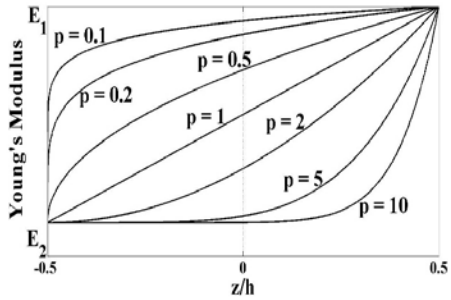
$$\bar{x}=\frac{x}{a},\ \bar{y}=\frac{y}{b},\ \bar{z}=\frac{z}{h} \quad (\text{٤٢-الف})$$

$$\bar{u}_0=\frac{u_0}{a},\ \bar{v}_0=\frac{v_0}{a},\ \bar{w}_0=\frac{w_0}{a} \quad (\text{٤٢-ب})$$

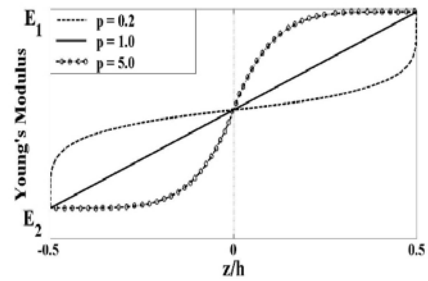
$$\bar{c}=\frac{c}{a},\ \bar{d}=\frac{d}{b},\ r=\frac{a}{b} \quad (\text{٤٢-ج})$$

$$\Omega=\omega h\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}},\ r_m=\frac{\gamma_m cd}{\rho abh} \quad (\text{٤٢-د})$$

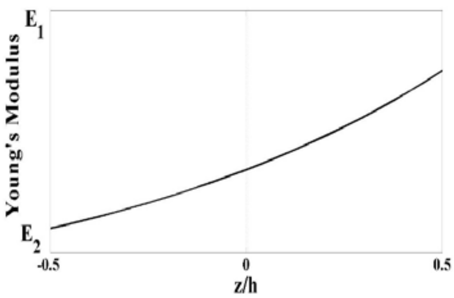
در روابط بالا Ω فرکانس بی‌بعد و r_m نسبت جرم به جرم ورق است. با حل دستگاه معادلهٔ (٤١) مقادیر ویژهٔ آن که همان فرکانس‌های طبیعی ورق هستند محاسبه می‌شوند.



شکل ۲ تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق مدرج توانی



شکل ۳ تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق سیگموید



شکل ٤ تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق نمایی

نتایج عددی

خواص زیر برای یک ورق مدرج فرض شده است:

$$E_1 = 200\ \text{Gpa},\ \rho_1 = 5700\ \text{kg/m}^3 \qquad (\text{٤٣–الف})$$

$$E_2 = 70\ \text{Gpa},\ \rho_2 = 2702\ \text{kg/m}^3 \qquad (\text{٤٣–ب})$$

کلیهٔ نتایج با فرض v = ۰/۳ محاسبه شده است.

در شکل‌های (٤-۲) تغییرات مدول یانگ در راستای ضخامت برای یک ورق در سه حالت مدرج توانی، سیگموید و نمایی نشان داده شده است. با برابر صفر قرار دادن انرژی جنبشی ناشی از جرم گسترده ($T_m = 0$) و حل دستگاه معادلهٔ (٤١) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق بدون جرم به‌دست می‌آید. در این حالت می‌توان نتایج به‌دست آمده را با نتایج محاسبه‌شدهٔ قبلی مقایسه و دقت روش پیشنهادی را بررسی کرد. در جدول (۱) مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده برای یک ورق مربعی مدرج نوع توانی در نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و نیز در مقادیر مختلف ضریب ماده p نشان داده و این مقادیر با نتایج به‌دست آمده توسط ول [14]، کیان [15] و فریرا [17] مقایسه شده است. در جدول (۲) نیز مقادیر چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد اول یک ورق مربعی مدرج توانی با نتایج ارائه شده توسط کیان [15] و فریرا [17] مقایسه شده است. با بررسی جدول‌های (۲ و ۱) می‌توان مشاهده کرد که نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله دقت خوب و قابل‌قبولی دارند.

جدول ۱ فرکانس بی‌بعد اول برای ورق مربعی مدرج توانی

مرجع	P=1 a / h = ۱۰	P=1 a / h = ۵	P=2 a / h = ۵	P=3 a / h = ۵
نتایج حاضر	۰/۰٦۰۱	۰/۲۲۱۳	۰/۲۲۰۵	۰/۲۲۱۱
فریرا [17]	۰/۰۵۹۲	۰/۲۱۸۸	۰/۲۱۸۸	۰/۲۲۰۲
درصد خطا	۱/۵	۱/۱	۰/۷۷	۰/٤۸
ول [۱٤]	۰/۰۵۹٦	۰/۲۱۹۲	۰/۳۱۹۷	۰/۲۲۱۱
درصد خطا	۰/۸	۰/۹	۰/۳٦	۰/۰
کیان [15]	۰/۰۵۸٤	۰/۲۱۵۲	۰/۲۱۵۳	۰/۲۱۷۲
درصد خطا	۲/۸	۲/۷	۳/٤	۰/۳۹

جدول ۲ چهار فرکانس بی‌بعد اول برای ورق مربع توانی، $a/h=۲۰$، $p=۱$

مود (m,n)	نتایج حاضر	فریرا [17]	درصد خطا	کیان [15]	درصد خطا
(۱و۱)	۰/۰۱۵۰	۰/۱٤۷	۲/۰	۰/۰۱٤۹	۰/۷
(۱و۲)	۰/۰۳۸۱	۰/۰۳۷۵	۱/٦	۰/۰۳۷۷	۱/۰
(۲و۱)	۰/۰۳۸۱	۰/۰۳۷۵	۱/٦	۰/۰۳۷۷	۱/۰
(۲و۲)	۰/۰٦۰۱	۰/۰۵۹۲	۱/۵	۰/۰۵۹۳	۱/۳

در جدول‌های (٤ و ۳) مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول به‌ازای نسبت‌های مختلف a/b و a/h برای یک ورق مدرج در دو حالت مدرج توانی (و یا سیگموید) به‌ازای $p=۱$ و مدرج نمایی نشان داده شده است. در حالتی که $p=۱$ است با توجه به روابط (۹-۱) تغییرات چگالی و مدول یانگ در راستای ضخامت برای دو ورق مدرج توانی و سیگموید که ویژگی‌های یکسانی دارند، برابر است و لذا می‌توان گفت در حالتی که $p=۱$ است هر دو ورق مانند هم رفتار می‌کنند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق با افزایش نسبت طول به عرض بیشتر و با افزایش نسبت طول به ضخامت یعنی نازک شدن ورق کمتر می‌شود. در حالتی که a/b افزایش می‌یابد به‌علت ثابت بودن a/h، هم طول و هم ضخامت ورق زیاد می‌شود و بنابراین سختی ورق افزایش می‌یابد و با توجه به رابطهٔ فرکانس بی‌بعد که رابطهٔ مستقیم با سختی دارد، فرکانس بی‌بعد افزایش می‌یابد. در حالت دوم که a/h افزایش می‌یابد و a/b ثابت است، ورق نازک می‌شود و لذا سختی آن کاهش می‌یابد که این امر باعث کاهش فرکانس می‌شود. هم‌چنین با توجه به بالاتر بودن مقادیر فرکانس برای ورق مدرج توانی می‌توان نتیجه گرفت که ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی از خود نشان می‌دهد.

جدول ۳ فرکانس بی‌بعد برای یک ورق بدون جرم مدرج توانی و سیگموید، $p=۱$

a/b	$a/h=۵$	$a/h=۱۰$	$a/h=۲۰$
۰/۲	۰/۱۲۱۵	۰/۰۳۱۹	۰/۰۰۸۱
۰.٤	۰/۱۳٤۷	۰/۰۳۵۵	۰/۰۰۹۰
۰/٦	۰/۱۵٦۳	۰/۰٤۱۵	۰/۰۱۰٦
۰/۸	۰/۱۸۵۷	۰/۰٤۹۸	۰/۰۱۲۷
۱	۰/۲۲۱۳	۰/۰٦۰۱	۰/۰۱۵۰
۱/۲	۰/۲٦۵٦	۰/۰۷۳۲	۰/۰۱۸۸
۱/٤	۰/۳۱٤۵	۰/۰۸۸۱	۰/۰۲۲۸
۱/٦	۰/۳٦۸٦	۰/۱۰۵۰	۰/۰۲۷٤
۱/۸	۰/٤۲۷۰	۰/۱۲۳۹	۰/۰۳۲۵
۲	۰/٤۸۹۳	۰/۱٤٤۵	۰/۰۳۸۲

جدول ٤ فرکانس بی‌بعد برای یک ورق بدون جرم مدرج نمایی

a/b	$a/h=۵$	$a/h=۱۰$	$a/h=۲۰$
۰/۲	۰/۱۲۰۳	۰/۰۳۱٦	۰/۰۰۸۰
۰/٤	۰/۱۳۳٤	۰/۰۳۵۲	۰/۰۰۸۹
۰/٦	۰/۱۵٤۷	۰/۰٤۱۲	۰/۰۱۰۵
۰/۸	۰/۱۸۳۷	۰/۰٤۹٤	۰/۰۱۲٦
۱	۰/۲۱۹۹	۰/۰۵۹۹	۰/۰۱۵٤
۱/۲	۰/۲٦۲٤	۰/۰۷۲٦	۰/۰۱۸۷
۱/٤	۰/۳۱۰٦	۰/۰۸۷۳	۰/۰۲۲٦
۱/٦	۰/۳٦۳۷	۰/۱۰٤۱	۰/۰۲۷۲
۱/۸	۰/٤۲۱۱	۰/۱۲۲٦	۰/۰۳۲۲
۲	۰.٤۸۲۲	۰.۱٤۳۰	۰.۰۳۷۹

در جدول (۵) فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی مدرج در دو حالت مدرج توانی (و یا سیگموئید) و نمایی به‌ازای $p=۱$ و $a/h=۱۰$ تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی ارائه شده است. جرم گستردهٔ موضعی به دو شکل در نظر گرفته شده است. در حالت اول جرم در مرکز ورق با نسبت جرم (r_m) ۰/۵ و ابعاد $c/a=d/b=۰/٤$ و در حالت دوم جرم در مرکز ورق با نسبت جرم ۰/۹ و ابعاد $c/a=d/b=۰/۱$ در نظر گرفته می‌شود. مشخص

است که جرم گسترده در حالت دوم متمرکزتر از حالت اول است. با توجه به مقادیر موجود در جدول (٦)، هنگامی که جرم متمرکزتر است درصد کاهش فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود چون اثر آن روی نقطه شکم در میانه ورق بیشتر شده و لذا انرژی جنبشی ناشی از جرم زیاد می‌شود (بیشترین مقدار خیز برای ورق در نظر گرفته شده در وسط آن است و بنابراین با توجه به معادله انرژی جنبشی هر چه جرم در این نقطه متمرکز شود مقدار انرژی جنبشی نیز بیشتر می‌شود). بنابراین انرژی جنبشی کل نیز افزایش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی ورق کاهش می‌یابد، که این کاهش مطابق انتظار است.

جدول ۵ فرکانس بی‌بعد اول برای یک ورق مربعی مدرج، $p = ۱$

نوع ورق	بدون جرم	جرم در حالت اول	درصد کاهش	جرم در حالت دوم	درصد کاهش
توانی	۰/۰٦۱۰	۰/۰۲۰۹	٦۵/۷۲	۰/۰۱۱۵	۸۰/۸۷
نمایی	۰/۰۵۹۹	۰/۰۲۰۱	٦٦/٤٤	۰/۰۱۱٦	۸۰/٦۳

جدول ٦ فرکانس بی‌بعد اول برای ورق توانی و یا سیگموید با جرم گسترده، $p = ۱$

a / b	a / h = ۵	a / h = ۱۰	a / h = ۲۰
۰/۲	۰/۰۲۱۵	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۲۷
۰/٤	۰/۰۳٤۷	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۳۱
۰/٦	۰/۰۵٦٤	۰/۰۱٤۲	۰/۰۰۳۸
۰/۸	۰/۰٦۹۳	۰/۰۱۷٤	۰/۰۰٤۳
۱	۰/۰۸۳٤	۰/۰۲۰۹	۰/۰۰۵۲
۱/۲	۰/۱۰۳۲	۰/۰۲۵۹	۰/۰۰٦۵
۱/٤	۰/۱۲۸۰	۰/۰۳۲۱	۰/۰۰۸۰
۱/٦	۰/۱۵۷۷	۰/۰۳۹٦	۰/۰۰۹۹
۱/۸	۰/۱۹۲۱	۰/۰٤۸۳	۰/۰۱۲۱
۲	۰/۲۳۱۵	۰/۰۵۸۳	۰/۰۱٤٦

جدول ۷ فرکانس بی‌بعد اول برای یک ورق مدرج نمایی با جرم گسترده

a / b	a / h = ۵	a / h = ۱۰	a / h = ۲۰
۰/۲	۰/۰۲۰۳	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۲۱
۰/٤	۰/۰۳۳٤	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۲۹
۰/٦	۰/۰۵۵۳	۰/۰۱۳۵	۰/۰۰۳۲
۰/۸	۰/۰٦۸۰	۰/۰۱٦۷	۰/۰۰٤۱
۱	۰/۰۸۲۲	۰/۰۲۰۱	۰/۰۰٤۸
۱/۲	۰/۱۰۱۹	۰/۰۲۵۱	۰/۰۰٦۰
۱/٤	۰/۱۲٦۸	۰/۰۳٤۱	۰/۰۰۷۵
۱/٦	۰/۱۵٦۳	۰/۰۳۸۹	۰/۰۰۹۳
۱/۸	۰/۱۹۰۹	۰/۰٤۷۷	۰/۰۱۱۵
۲	۰.۲۳۰۵	۰.۰۵۷۸	۰.۰۱۳۷

در جدول‌های (۷ و٦) مقادیر فرکانسهای طبیعی یک ورق مدرج در دو حالت مدرج توانی (و یا سیگموید) به‌ازای $p = ۱$ و مدرج نمایی با نسبت‌های مختلف طول به عرض و طول به ضخامت تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی با نسبت جرم ۰/۵ و ابعاد $c / a = d / b = ۰/۰٤$ که در وسط ورق قرار گرفته است، آورده شده است. نتایج موجود در این جدول از روند نشان داده شده در جدول‌های (٤ و۳) تبعیت می‌کند. فرکانس‌های طبیعی ورقی که تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی قرار گرفته است نسبت به همان مقادیر در حالتی که ورق بدون جرم گسترده است، کاهش می‌یابد. این کاهش ناشی از وجود جرم و افزایش انرژی جنبشی کل سیستم است. هم‌چنین با توجه به مقادیر فرکانس‌ها می‌توان نتیجه گرفت که ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی از خود نشان می‌دهد که این روند در جدول‌های (٤ و ۳) نیز مشاهده شد.

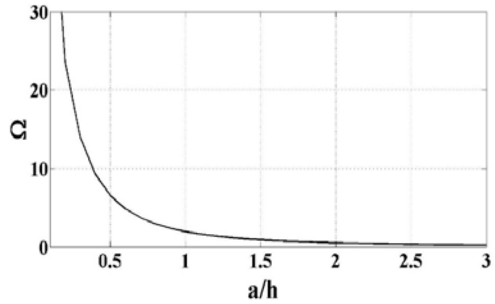
در جدول (۸) مقادیر فرکانس‌های طبیعی برای یک ورق مربعی مدرج در دو حالت مدرج توانی و سیگموید به‌ازای مقادیر مختلف p نشان داده شده است. ورق مربعی مذکور تحت اثر یک جرم گستردهٔ

موضعی با نسبت جرم ۰/۵و ابعاد $c/a = d/b = ۰/٤$ در وسط ورق قرار گرفته است و نسبت a/h نیز ۱۰ است. با توجه به مقادیر موجود در این جدول، مشاهده می‌شود که به‌طور کلی با افزایش توان p مقدار فرکانس کاهش می‌یابد. هم‌چنین کاملاً مشخص است که مقدار فرکانس برای ورق مدرج توانی کمتر از همان مقدار برای ورق مدرج سیگموید است. لذا ورق مدرج سیگموید صلبیت بیشتری از خود نشان می‌دهد. از طرفی با توجه به مقادیر فرکانس‌های موجود در جدول‌های (٤ و ۳) و جدول‌های (۷ و ٦) نشان داده شد که ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی دارد.

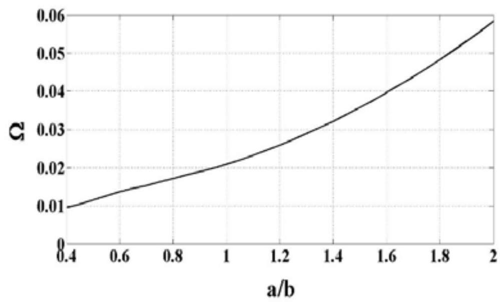
جدول ۸ فرکانس بی‌بعد اول برای یک ورق مربعی با جرم گسترده، $a/h = ۱۰$

p	ورق مدرج توانی	ورق مدرج سیگموید
۰/۱	۰/۰۲۳٤	۰/۰۲۳٦
۰/۲	۰/۰۲۲۸	۰/۰۲۲۹
۰/۵	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۲۱
۱	۰/۰۲۰۹	۰/۰۲۰۹
۲	۰/۰۲۱۷	۰/۰۲۰٤
۵	۰/۰۲۱۸	۰/۰۲۰۲
۱۰	۰/۰۲۰۸	۰/۰۲۰۰
۲۰	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۹
۵۰	۰/۰۱۷۵	۰/۰۱۹۹
۱۰۰	۰/۰۱٦٦	۰/۰۱۹۹

شکل‌های (٦ و ۵) به‌ترتیب اثر نسبت طول به ضخامت و طول به عرض را روی فرکانس طبیعی بی‌بعد اول یک ورق مدرج توانی به‌ازای $p = ۱$ نشان می‌دهند. در شکل (۵) ورق مربعی در نظر گرفته شده است و در شکل (٦) نسبت طول به ضخامت برابر با ۱۰ است. همانطور که پیشتر با بررسی جدول‌های (٤ و ۳) هم‌چنین جدول‌های (۷ و ٦) ذکر شد، با افزایش نسبت طول به عرض فرکانس بی‌بعد افزایش و با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد. در هر دو شکل مذکور ورق تحت اثر یک جرم گستردهٔ موضعی در وسط ورق با نسبت جرم ۰/۵ و ابعاد $c/a = d/b = ۰/٤$ قرار گرفته است.



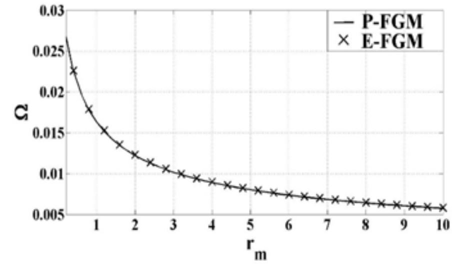
شکل ۵ تغییرات فرکانس بی‌بعد با نسبت طول به ضخامت در یک ورق مدرج توانی



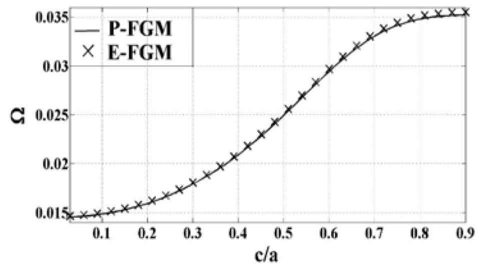
شکل ٦ تغییرات فرکانس بی‌بعد با نسبت طول به عرض در یک ورق مدرج توانی

تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق با افزایش نسبت جرم (r_m) برای یک ورق مربعی مدرج (در دو حالت مدرج توانی به‌ازای $p = ۱$ و مدرج نمایی) به‌ازای $a/h = ۱۰$ در شکل (۷) نشان داده شده است. در این حالت جرم گستردهٔ موضعی در وسط ورق و با ابعاد $c/a = d/b = ۰.٤$ فرض شده است. در این حالت با افزایش نسبت جرم به‌دلیل افزایش انرژی جنبشی ناشی از جرم، افزایش انرژی جنبشی کل فرکانس کاهش می‌یابد که این کاهش بدیهی و مطابق انتظار است. با توجه به نمودارهای نشان داده شده در این شکل، فرکانس‌های ورق مدرج توانی اندکی بالاتر

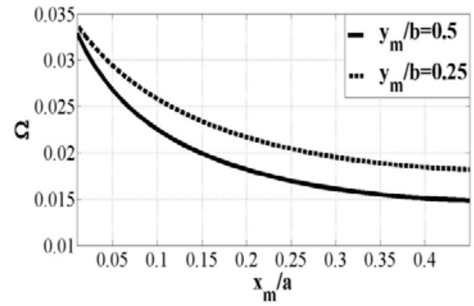
از فرکانس‌های ورق مدرج نمایی است. لذا ورق مدرج توانی صلبیت بیشتری نسبت به ورق مدرج نمایی دارد.



شکل ۷ تغییرات فرکانس بی‌بعد با نسبت جرم برای یک ورق مدرج مربعی



شکل ۸ تغییرات فرکانس بی‌بعد با افزایش سطح اثر جرم برای یک ورق مدرج مربعی



شکل ۹ تغییرات فرکانس بی‌بعد با تغییرمکان جرم برای یک ورق مدرج توانی

در شکل (۸) اثر افزایش سطح جرم روی فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی مدرج (در سه حالت مدرج توانی و سیگموید به‌ازای $p = ۱$ و مدرج نمایی) به‌ازای $a/h = ۱۰$ نشان داده شده است. در این حالت جرم به‌صورت مربعی ($c = d$) و در میانهٔ ورق قرار دارد و مقدار جرم نیز نصف جرم ورق است. با توجه به شکل با افزایش سطح جرم فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق افزایش می‌یابد. از آن‌جا که بیشترین میزان خیز ورق در نظر گرفته‌شده در وسط آن است هر چه سطح اثر جرم افزایش یابد انرژی جنبشی در سطح بیشتری که خیز کمتری دارد انتگرال‌گیری می‌شود و لذا مقدار آن کاهش می‌یابد. بنابراین کاملاً مشخص است که این کاهش باعث افزایش فرکانس می‌شود. در این حالت نیز مقدار فرکانس برای ورق مدرج توانی بیشتر از ورق مدرج نمایی است.

شکل (۹) اثر موقعیت جرم گستردهٔ موضعی روی فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مدرج توانی ($p = ۱$) مربعی را نشان می‌دهد. در این حالت موقعیت جرم گستردهٔ موضعی روی خط وسط ورق ($y_m / b = ۰.۵$) و روی خط یک چهارم بالایی و یا پایینی آن ($y_m / b = ۰.۲۵$) در حال تغییر است و نسبت جرم ۰.۵ و ابعاد آن $c/a = d/b = ۰.۱$ فرض شده است. با توجه به شکل هرچه جرم به وسط ورق نزدیک‌تر شود به‌دلیل افزایش انرژی جنبشی، فرکانس کاهش می‌یابد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاش آزاد یک ورق مدرج مستطیلی تحت اثر جرم گستردهٔ موضعی بررسی شده است. ورق به سه حالت مدرج توانی، سیگموید و یا نمایی در نظر گرفته می‌شود. تکیه‌گاه ورق ساده در نظر گرفته شده و معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون و بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم به‌دست آمده است. فرکانس‌های طبیعی ورق محاسبه شده است و اثر پارامترهای مختلفی مانند ابعاد ورق، نسبت جرم و سطح اثر و موقعیت جرم گستردهٔ موضعی روی آنها بررسی شده است. با تحلیل نتایج مشخص شد که با افزایش نسبت طول به ضخامت و نسبت جرم، فرکانس بی‌بعد ورق کاهش و با افزایش نسبت طول به عرض و سطح اثر جرم، فرکانس افزایش می‌یابد. از طرفی هر

چه جرم به میانهٔ ورق نزدیک‌تر شود، فرکـانس کـاهش می‌یابد. هم‌چنین ورق مدرج سیگموید صلبیت بیشتری از خود نشان می‌دهد که باعث افزایش فرکانس‌های آن می‌شود. با مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه‌شـدهٔ قبلی در حالت‌های مشابه نیز نشان داده شده اسـت کـه نتایج حاضر از دقت خوبی برخوردار است.

مراجع

1. Stavsky, Y., "On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thickness variation of the elastic moduli", *Topics App. Mech., New York: American Elsevier*, pp. 105, (1965).
2. Bert, C. W. and Chen, T.L.C., "Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 14, pp. 465-473, (1978).
3. Reddy, J.N., "Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method", *J. Sound Vib.*, Vol. 66(4), pp. 565-576, (1979).
4. Reddy, J.N. and Khdeir, A.A., "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories", *America. Inst. Aeronaut. Astornaut. J.*, Vol. 27(12), pp. 1808-1817, (1989).
5. Reddy, J.N., "*Mechanics of Laminated Composite Plates*", Second Edition, New York: CRC Press. (1997).
6. Khdeir, A.A. and Reddy, J.N., "Free vibration of laminated composite plates using second-order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, Vol. 71, pp. 617-626, (1999).
7. Singh, B.N., Yadav, D. and Iyengar, N.G.R., "Natural frequencies of composite plates with random material properties using higher-order shear deformation theory", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 43, pp. 2193-2214, (2001).
8. Kant, T. and Swaminathan, K., "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory", *Compos. Struct.*, Vol. 53, pp. 73-85, (2001).
9. Rastgaar, A., Mahinfalah, M. and Nakhaie Jazar, G., "Natural frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, Vol. 72, pp. 273-279, (2006).
10. Kompaz, O. and Telli, S., "Free vibration of a rectangular plate carrying distributed mass", *J. Sound Vib.*, Vol. 251(1), pp. 39-57, (2002).
11. Wong, W.O., "The effects of distributed mass loading on plate vibration behavior", *J. Sound Vib.*, Vol. 252(3), pp. 577-583, (2002).
12. Alibeigloo, A., Shakeri, M. and Kari, M.R., "Free vibration analysis of antisymmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third-order shear deformation theory", *Ocean Eng.*, Vol. 35, pp. 183–190, (2008).
13. Chi, S.H. and Chung, Y.L., "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: analysis", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 43, pp. 3657-3674, (2006).
14. Vel, S.S. and Batra, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J. Sound Vib.*, Vol. 272, pp. 703-730, (2004).
15. Qian, L.F., Batra, R.C. and Chen, L.M., "Static and dynamic deformations of thick functionally

graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method", *Compos., Part B*, Vol. 35, pp. 685–697, (2004).

16. Zenkour, A.M., "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 42, pp. 5243–5258, (2005).
17. Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F. and Jorge, R.M.N., "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Compos. Struct.*, Vol. 75, pp. 593–600, (2006).
18. Hosseini, Sh., Hashemi, H., Rokni Damavandi, T., Akhavan, H. and Omidi, M., "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory", *Appl. Math. Model.*, Vol. 34, pp. 1276–1291, (2010).
19. Talha, M. and Singh, B.N., "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model.*, Vol. 34, pp. 3991–4011, (2010).
20. Efraim, E., "Accurate formula for determination of natural frequencies of FGM plates basing on frequencies of isotropic plates", *Proce. Eng.*, Vol. 10, pp. 242–247, (2011).
21. Uymaz, B., Aydogdu, M. and Filiz, S., "Vibration analyses of FGM plates with in-plane material in-homogeneity by Ritz method", *Compos. Struct.*, Vol. 94, pp. 1398–1405, (2012).
22. Dogan, V., "Nonlinear vibration of FGM plates under random excitation", *Compos. Struct.*, Vol. 95, pp. 366–374, (2013).

پیوست الف)

مراحل به‌دست آوردن معادلات حرکت با استفاده از اصل هامیلتون:

۱- ابتدا صورت کلی اصل همیلتون (رابطهٔ ٤۰ مقاله) نوشته می‌شود:

$$0=\delta\int_0^T (U-T)\,dt \quad\Rightarrow\quad 0=\int_0^T (\delta U-\delta T)\,dt$$

۲- سپس معادلات انرژی کرنشی (رابطهٔ ۲۸) و جنبشی ورق جایگذاری می‌شود:

$$\delta U=\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+2\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}+2\sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz})dxdydz$$

$$\delta T=\delta T_p+\delta T_m$$

۳- سپس کرنش‌ها در معالات فوق جای‌گذاری می‌شود (روابط ۱۸):

$$\delta U=\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}[\sigma_{xx}(\delta\varepsilon^0{}_{xx}+z\delta\varepsilon^1{}_{xx}-c_1z^3\delta\varepsilon^3{}_{xx})+\sigma_{yy}(\delta\varepsilon^0{}_{yy}+z\delta\varepsilon^1{}_{yy}-c_1z^3\delta\varepsilon^3{}_{yy})$$

$$+\sigma_{xy}(\delta\varepsilon^0{}_{xy}+z\delta\varepsilon^1{}_{xy}-c_1z^3\delta\varepsilon^3{}_{xy})+\sigma_{xz}(\delta\varepsilon^0{}_{xz}+z^2\delta\varepsilon^2{}_{xz})+\sigma_{yz}(\delta\varepsilon^0{}_{yz}+z^2\delta\varepsilon^2{}_{yz})])dxdydz$$

$$\delta T_P=\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2}\rho_0[(\dot u_0+z\dot\phi_x-c_1z^3\dot\varphi_x)(\delta\dot u_0+z\delta\dot\phi_x-c_1z^3\delta\dot\varphi_x)+$$

$$(\dot v_0+z\dot\phi_y-c_1z^3\dot\varphi_y)(\delta\dot v_0+z\delta\dot\phi_y-c_1z^3\delta\dot\varphi_y)+\dot w_0\delta\dot w_0]\,dxdydz$$

$$\delta T_m=\int_{x_m-c/2}^{x_m+c/2}\int_{y_m-d/2}^{y_m+d/2}\gamma_0[(\dot u_0+z\dot\phi_x-c_1z^3\dot\varphi_x)(\delta\dot u_0+z\delta\dot\phi_x-c_1z^3\delta\dot\varphi_x)$$

$$(\dot v_0+z\dot\phi_y-c_1z^3\dot\varphi_y)(\delta\dot v_0+z\delta\dot\phi_y-c_1z^3\delta\dot\varphi_y)+\dot w_0\delta\dot w_0]\,dxdy$$

٤- با قرار دادن روابط فوق در رابطه کلی اصل همیلتون در مرحلهٔ بعد انتگرال‌گیری فقط روی محور z انجام می‌شود و تنش‌ها برحسب منتجه‌های تنش (روابط ۲۱) نوشته می‌شوند.

۵- سپس با قرار دادن کرنش‌ها برحسب جابه‌جایی‌ها (روابط ۲۲ و ۲۳) کل عبارت برحسب جابه‌جایی نوشته می‌شود.

٦- در مرحله بعد معادلات بر حسب جابه‌جایی‌های مجازی (δu_0، δv_0، δw_0، $\delta\phi_x$ و $\delta\phi_y$) به‌صورت پنج معادلهٔ مرتب شده و معادلات حرکت استخراج می‌شود. در این مرحله از هر یک از جابه‌جایی‌های مجازی (δu_0، δv_0، δw_0، $\delta\phi_x$ و $\delta\phi_y$) فاکتورگیری می‌شود و عبارتی که ضریب هر یک از جابه‌جایی‌های مجازی است یک معادلهٔ حرکت است.

۷- در معادلات حرکت به‌دست آمده منتجه‌های تنش را می‌توان با استفاده از روابط (۲۲ و ۲۳) برحسب کرنش‌ها و در نهایت برحسب جابه‌جایی نوشت.

پیوست ب)

درایه‌های ماتریس سختی و جرم برای ماده با فرم PFGM به فرم زیر است:

$$c_1=4/(3h^2)$$
$$c_2=4/h^2$$
$$x_1=x_m-c/2$$

$y_1 = y_m - d/2$
$const_1 = [\sin(\alpha a)(1-\cos(\beta b))]/\alpha\beta$
$const_2 = [\sin(\beta b)(1-\cos(\alpha a))]/\alpha\beta$
$const_3 = [1-\cos(\alpha a)][1-\cos(\beta b)]/\alpha\beta$
$const_4 = \sin(\alpha a)\sin(\beta b)/\alpha\beta$
$const_5 = \gamma_m[\cos(\beta(y_1+d))-\cos(\beta(y_1-d))][\sin(\alpha(x_1+c))-\sin(\alpha(x_1-c))]/\alpha\beta$
$const_6 = \gamma_m[\sin(\beta(y_1+d))-\sin(\beta(y_1-d))][\cos(\alpha(x_1+c))-\cos(\alpha(x_1-c))]/\alpha\beta$
$const_5 = \gamma_m[\cos(\beta(y_1+d))-\cos(\beta(y_1-d))][\cos(\alpha(x_1+c))-\cos(\alpha(x_1-c))]/\alpha\beta$
$k_{11} = -const_1(A_1\alpha^2 + A_3\beta^2)$
$k_{12} = -const_1(A_2 + A_3)\alpha\beta$
$k_{13} = -const_1(E_1'\alpha^2 + E_2'\beta^2 + 2E_3'\beta^2)c_1\alpha$
$k_{14} = -const_1(-B_1\alpha^2 + c_1E_1'\alpha^2 - B_3\beta^2 + c_1E_3'\beta^2)$
$k_{15} = -const_1(-B^2 + c_1E_2' - B_3 + c_1E_3')\alpha\beta$
$k_{21} = -const_2(A_2 + A_3)\alpha\beta$
$k_{22} = -const_2(A_1\beta^2 + A_3\alpha^2)$
$k_{23} = -const_2(E_2'\alpha^2 + E_1'\beta^2 + 2E_3'\alpha^2)c_1\beta$
$k_{24} = -const_2(-B^2 + c_1E_2' - B_3 + c_1E_3')\alpha\beta$
$k_{25} = -const_2(-B_1\beta^2 + c_1E_1'\beta^2 - B_3\alpha^2 + c_1E_3'\alpha^2)$
$k_{31} = const_3(-E_1'\alpha^2 - E_2'\beta^2 - 2E_3'\beta^2)c_1\alpha$
$k_{32} = const_3(-E_2'\alpha^2 - E_1'\beta^2 - 2E_3'\alpha^2)c_1\beta$
$k_{33} = const_3(H_1{c_1}^2\alpha^4 + 2{c_1}^2H_2\alpha^2\beta^2 + {c_1}^2H_1\beta^4 + 4{c_1}^2H_3\alpha^2\beta^2 + A_3\alpha^2 - 2D_3c_2\alpha^2$
$+ {c_2}^2F_3\alpha^2 + A_3\beta^2 - 2c_2D_3\beta^2 + {c_2}^2F_3\beta^2)$
$k_{34} = const_3(-c_1F_1\alpha^3 + H_1{c_1}^2\alpha^3 - c_1F_2\alpha\beta^2 + {c_1}^2H_2\alpha\beta^2 - 2c_1F_3\alpha\beta^2 + 2{c_1}^2H_3\alpha\beta^2$
$+ A_3\alpha - 2c_2D_3\alpha + {c_2}^2F_3\alpha)$
$k_{35} = const_3(-c_1F_2\alpha^2\beta + {c_1}^2H_2\alpha^2\beta - c_1F_1\beta^3 + {c_1}^2H_1\beta^3 - 2c_1F_3\alpha^2\beta + 2{c_1}^2H_3\alpha^2\beta$
$+ A_3\beta - 2c_2D_3\beta + {c_2}^2F_3\beta)$
$k_{41} = const_1(B_1\alpha^2 - c_1E_1'\alpha^2 + B_3\beta^2 - c_1E_3'\beta^2)$
$k_{42} = const_1(B_2 - c_1E_2' + B_3 - c_1E_3')\alpha\beta$
$k_{43} = const_1(-c_1F_1\alpha^3 + H_1{c_1}^2\alpha^3 - c_1F_2\alpha\beta^2 + {c_1}^2H_2\alpha\beta^2 - 2c_1F_3\alpha\beta^2 + 2{c_1}^2H_3\alpha\beta^2$
$+ A_3\alpha - 2c_2D_3\alpha + {c_2}^2F_3\alpha)$
$k_{44} = const_1(D_1\alpha^2 - 2c_1F_1\alpha^2 + {c_1}^2H_1\alpha^2 + D_3\beta^2 - 2c_1F_3\beta^2 + {c_1}^2H_3\beta^2 + A_3 - 2c_2D_3 + {c_2}^2F_3)$
$k_{45} = const_1(D_2 - 2c_1F_2 + {c_1}^2H_2 - 2c_1F_3 + {c_1}^2H_3 + D_3)\alpha\beta$
$k_{51} = const_2(B_2 - c_1E_2' + B_3 - c_1E_3')\alpha\beta$
$k_{52} = const_2(B_1\beta^2 - c_1E_1'\beta^2 + B_3\alpha^2 - c_1E_3'\alpha^2)$

$$k_{53} = const_2(-c_1F_2\alpha^2\beta + c_1^2H_2\alpha^2\beta - c_1F_1\beta^3 + c_1^2H_1\beta^3 - 2c_1F_3\alpha^2\beta + 2c_1^2H_3\alpha^2\beta$$
$$+ A_3\beta - 2c_2D_3\beta + c_2^2F_3\beta)$$
$$k_{54} = const_2(D_2 - 2c_1F_2 + c_1^2H_2 - 2c_1F_3 + c_1^2H_3 + D_3)\alpha\beta$$
$$k_{55} = const_2(D_1\beta^2 - 2c_1F_1\beta^2 + c_1^2H_1\beta^2 + D_3\alpha^2 - 2c_1F_3\alpha^2 + c_1^2H_3\beta^2 + A_3 - 2c_2D_3 + c_2^2F_3)$$
$$s_{11} = const_1 I_0 - const_5$$
$$s_{12} = 0$$
$$s_{13} = const_1(-I_3c_1\alpha) + const_5[-(h^3/8)c_1\alpha]$$
$$s_{14} = const_1(I_1 - I_3c_1) + const_5[-(h^3/8)c_1 + h/2]$$
$$s_{15} = 0$$
$$s_{21} = 0$$
$$s_{22} = const_2 I_0 - const_6$$
$$s_{23} = const_2(-I_3c_1\beta) + const_6[-(h^3/8)c_1\beta]$$
$$s_{24} = 0$$
$$s_{25} = const_2(I_1 - I_3c_1) + const_5[-(h^3/8)c_1 + h/2]$$
$$s_{31} = const_3(-I_3c_1\alpha) + const_7[(h^3/8)c_1\alpha]$$
$$s_{32} = const_3(-I_3c_1\beta) + const_7[(h^3/8)c_1\beta]$$
$$s_{33} = const_3(I_6c_1^2\alpha^2 + I_6c_1^2\beta^2 + I_0) + const_7[(h^6/32)c_1^2(\alpha^2 + \beta^2) + 1]$$
$$s_{34} = const_3(-I_4c_1 + I_6c_1^2)\alpha + const_7[-(h^4/16)c_1\alpha + (h^6/32)c_1^2\alpha]$$
$$s_{35} = const_3(-I_4c_1 + I_6c_1^2)\beta + const_7[-(h^4/16)c_1\beta + (h^6/32)c_1^2\beta]$$
$$s_{41} = const_1(I_1 - I_3c_1) + const_5[(h/2) - (h^3/8)c_1]$$
$$s_{42} = 0$$
$$s_{43} = const_1(-I_4c_1 + I_6c_1^2)\alpha + const_5[-(h^4/16)c_1\alpha - (h^6/32)c_1^2\alpha]$$
$$s_{44} = const_1(I_2 - 2I_4c_1 + I_6c_1^2) + const_5[-(h^2/4) + 2(h^4/16)c_1 - (h^6/32)c_1^2]$$
$$s_{45} = 0$$
$$s_{51} = 0$$
$$s_{52} = const_2(I_1 - I_3c_1) + const_6[(h/2) - (h^3/8)c_1]$$
$$s_{53} = const_2(-I_4c_1 + I_6c_1^2)\beta + const_6[(h^4/16)c_1\beta - (h^6/32)c_1^2\beta]$$
$$s_{54} = 0$$
$$s_{55} = const_2(I_2 - 2I_4c_1 + I_6c_1^2) + const_6[-(h^2/4) + 2(h^4/16)c_1 - (h^6/32)c_1^2]$$